# 425. G. Golusin ノ新定理

城 憲 三 (阪大工)

(1) $F(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$

ヲ $|z|<1$ デ正則単葉ナ函数トスル、最近 Golusin ハ K. Löwner ノ方法ヲ利用シテ驚クベキ次ノ諸定理ヲ Recueil Math. ニ発表シタ、コレヲ御紹介シタイ。

1) $$\left|\arg\frac{F(z)}{z}\right|\leqq\log\frac{1+|z|}{1-|z|},\qquad\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\leqq\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

2) $$|\arg F'(z)|\leqq\left.\begin{matrix}4\arcsin|z| & \text{bei} & |z|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi+\log\dfrac{|z|^2}{1-|z|^2} & \text{bei} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq|z|<1.\end{matrix}\right\}$$

3) $$\left|\arg\frac{z^2F'(z)}{\{F(z)\}^2}\right|\leqq-\log(1-|z|^2).$$

〔注意〕 1) ハ Grunsky-Grötzsch ノ定理デアルガ、コレヲ導キ出スノニ多クノ予備知識ヲ必要トシ簡単ナ別証明ガ要求サレテキタ。コレガ実現シタノデアル。

2) ハ驚クベキ新発見デアル、誰モガ知リ得ナカッタ Drehungssatz! ソノ正体ガ分ッタノデアル。

3) モ亦新定理デアル。単位円ノ内部,外部デ正規化シタ単葉函数ノ Drehungssatz ハコノ定理デ見事相関聯セシメラレ, Löwner, Grunsky, Grötzsch ノ結果ガ麗シク融合スル。

## §1. K. Löwner ノ理論

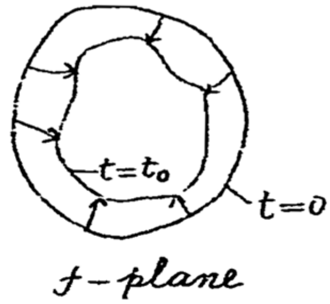
$\max\limits_{|z|=r}|F(z)|=M$, $(0<r<1)$ トシテ $0<\beta\leqq\frac{1}{M}$ ナル $\beta$ ヲ (1) ノ右辺ニ乗ジ, 函数

(2) $f(z)=\beta(z+a_2z^2+\cdots\cdots)$

ヲ考ヘルト, $f(z)$ ハ次ノ性質ヲ有スル。

i) (2)ハ E.K. (Einheitskreis) ヲ E.K. ニフクマレル面分ニウツス。

ii) $f(0)=0$, $f'(0)=\beta>0$. 勿論 $\beta\leqq 1$.




Löwner ハ (2) ヲ次ノ様ニ見タ。

(3) $f(z,t)=\beta(t)\{z+a_2(t)z^2+\cdots\cdots\}$,

$(0\leqq t\leqq t_0,\ |z|<1,\ \beta=\beta(t_0))$

即チ $f$ ハ実数 $t$ (例ヘバ $t$ ハ時間) ニ一様連続ニ関係スルトシ, $t=0$ ノトキ $f$ ハ Identitär 即チ $f(z,0)=z$ トシ, $t=t_0$ ノトキ $f$ ハ (2) ニナルト考ヘタ、$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ ガ存在シ且, $t$ ノ連続函数トスル。

特ニ

(4) $\left(\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}\right)_{t=0}=V(z)$

トオケバ, $t$ ガ時間ヲ表ハスナラ, $f(z,t)$ ハ Strömung ヲ表ハスシ, $V(z)$ ハ最初 $t=0$ ノトキノ ($t=t$ ノトキ $f(z,t)$

トナルベキ）Geschwindigkeitsfeld ヲ與フ。Schwarz Lemma デ

$$|f(z,t)| \leqq |z| \quad \text{identisch in } t.$$

ダカラ力學的ニ考ヘテ vector $V(z)$ ハ方向 $z \to 0$ ト角 $\leqq \frac{\pi}{2}$ ヲナス、即チ

$$p(z) = -\frac{V(z)}{z}, \quad V(z) = -z p(z)$$

トオケバ $|z|<1$ デ

$$\Re\, p(z) \geqq 0$$

$z=0$ ト $z=0$ ヲ通ル Strömung ハ固定シテオクカラ $V(0)=0$, $V'(0)=$ 實數、$p(z)$ ハ故ニ $|z|<1$ デ正則デ $p(0)$ ハ實數.

ソコデ今微分方程式

$$(5) \quad \frac{dw}{dt} = -w\, p(w,t)$$

ニ於テ $p(w,t)$ ハ $|w|<1$, $0 \leqq t \leqq t_0$ デ連續且ツ上ノ性質アリトシ，コノ解 $w$ ガ次ノ性質ヲ持ツモノトスル

$$(6) \quad \begin{aligned} w &= f(z,t) \\ f(z,0) &= z \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} &|z|<1 \\ &0 \leqq t \leqq t_0 \end{aligned}\right)$$

$p$ ノ性質カラ $|f(z,t)|$ ハ $z$ ヲキメルト $t$ ノ減少函數（少クトモ nicht zunehwende）．異ナル Aufangswerten $z$ カラハ $t$ ニ異ナッタ $w$ ガ生ズル、ダカラ (6) ハ $0 \leqq t \leqq t_0$ ナルスベテノ $t$ ニ對シヘツノ beschränkt ナ schlichte Abbildung ヲ與ヘル、Löwner ハ $p(w,t)$ トシテ

$$p(w,t) = \frac{1+k(t)w}{1-k(t)w} \quad |k(t)|=1, \quad (k(t): \text{連續})$$

ヲ選ビ，スベテノ beschränkte Abbildung ハ如何程ニモ beschränkten Schlitzabbildungen デ approximieren スルコトが出来ルコトヲ用ヒ，次ノ結論ニ達シタ。

$$\text{(7)} \quad \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)\frac{1+k(t)f(z,t)}{1-k(t)f(z,t)}$$

トスルトキ，任意ノ beschränkte Schlitzabbildung $b(z)=\beta(z+a_2z^2+\text{-------})$ ニ對シテ，一意的ニキマル連續函數 $k(t)$ $(0\leqq t\leqq t_0=\log\frac{1}{\beta})$，$|k(t)|=1$ がアッテ(7)ノ解が條件 $f(z,0)=z$ ヲ滿足シ，$t=t_0$ ノトキ $b(z)=$ ナル。

［注意］ $k(t)$ ヲ與ヘタラ(7)ハ Schlitzabbildung ヲ與ヘルトハ限ラナイが(7)ノ解ハ單葉ニナルコトハ上述ノ通リ分ッテキル。

§2. Schlitzapproximation ニヨリ吾人ハ(7)ヲ出發ノ關係式トスルノデアル、之レが Golusin 共人ノ考ヘデアル。

(7)ヨリ $$\frac{\partial \log f}{\partial t} = -\frac{1+k(t)f(z,t)}{1-k(t)f(z,t)}$$

兩辺ノ實數部分ヲ考ヘテ

$$\frac{1}{|f|}\frac{\partial |f|}{\partial t} = -\frac{1-|f|^2}{|1-k(t)f(z,t)|^2}$$

依ッテ

$$\text{(8)} \quad \frac{\partial |f(z,t)|}{\partial t} = -|f(z,t)|\frac{1-|f(z,t)|^2}{|1-k(t)f(z,t)|^2}$$

I. Bierberbach ノ Verzerrungssatz ノ証明

(8) ヨリ

$$-|f|\frac{1+|f|}{1-|f|}\leqq\frac{\partial|f|}{\partial t}\leqq-|f|\frac{1-|f|}{1+|f|}$$

之ヲ積分スレバヨハ $d$ ト同ジダカラ

$$\frac{1-|f|}{|f|(1+|f|)}d|f|\geqq-dt,\qquad\frac{1+|f|}{|f|(1-|f|)}\leqq-dt.$$

第一不等式ヨリ

$$\frac{|f|}{(1+|f|)^2}\geqq e^{-t_0}\frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

第二不等式ヨリ

$$\frac{|f|}{(1-|f|)^2}\leqq e^{-t_0}\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

$e^{-t_0}=\beta$ デアルカラ

$$(9)\qquad\frac{\beta|z|}{(1+|z|)^2}\leqq|f(z)|\leqq\frac{\beta|z|}{(1-|z|)^2}$$

コレカラ次ノ事柄モ分ル。

$$(10)\qquad\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqq|F'(z)|\leqq\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

$$(11)\qquad\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqq\left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\leqq\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

II、(7) ヨリ

$$d\arg f=-\mathfrak{J}\left(\frac{1+Kf}{1-Kf}\right)dt=-\frac{2\mathfrak{J}(Kf)}{|1-Kf|^2}dt,$$

$$|d\arg f|\leqq\frac{2|f|}{|1-Kf|^2}dt.$$

然ルニ (8) ヨリ

$$(12)\qquad dt=-\frac{|1-Kf|^2}{1-|f|^2}\cdot\frac{d|f|}{|f|}$$

デアルカラ

$$\left| d \arg f \right| \leqq -\frac{2d|f|}{1-|f|^2}.$$

従ッテ

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \int_{|f(z)|}^{|z|}\frac{2d|f|}{1-|f|^2} \leqq \int_{0}^{|z|}\frac{2d|f|}{1-|f|^2} = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

故ニ

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \log\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

従ッテ容易ニ次ノ結果ガ得ラレル。

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqq \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

III.

$$(13)\quad \left|\arg F'(z)\right| \leqq \left.\begin{matrix} 4\arcsin|z|, & |z| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi + \log\frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq |z| < 1 \end{matrix}\right\}$$

証明

$f' = \dfrac{\partial f(z,t)}{\partial z}$ トスレバ (7) ヨリ

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = -f' \cdot \frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2}.$$

従ッテ

$$\frac{\partial \arg f'}{\partial t} = -\mathfrak{I}\left(\frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2}\right) = -\frac{\mathfrak{I}(4kf-2k^2f^2)}{|1-kf|^4}$$

$$= \frac{2\mathfrak{I}\{(1-kf)^2\}}{|1-kf|^4},$$

即チ (12) ヲ代入シ

$$|d\arg f'| = \frac{2|\Im\{(1-kf)^2\}|dt}{|1-kf|^4} = \frac{2|\Im\{(1-kf)^2\}|}{|1-kf|^2}\cdot\frac{-d|f|}{(1-|f|^2)|f|}.$$

而シテ一方ニ於イテ

$$\frac{|\Im\{(1-kf)^2\}|}{|1-kf|^2} = |\sin 2\arg(1-kf)| \leqq \begin{cases} \sin 2\arcsin|f| = 2|f|\sqrt{1-|f|^2}, & |f| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1, & |f|<1. \end{cases}$$

デアルカラ，

$$|d\arg f'| \leqq \begin{cases} \dfrac{-4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}}, & |f| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-2d|f|}{(1-|f|^2)|f|}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq |f| < 1. \end{cases}$$

故ニ $|z| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ

$$|\arg f'(z)| \leqq \int_{|f(z)|}^{|z|}\frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} \leqq \int_0^{|z|}\frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} = 4\arcsin|z|,$$

$|z| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ

$$|\arg f'(z)| \leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{|z|}\frac{2d|f|}{(1-|f|^2)|f|},$$

$$|\arg f'(z)| \leqq \pi + \log\frac{|z|^2}{1-|z|^2} \qquad \text{(証明終)}$$

$|z| = \rho \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキニハ

$$F(z) = \int_0^z \frac{(1-e^{i\alpha}z)}{(1-e^{-i\alpha}z)^3}dz = z + \cdots\cdots, \quad \alpha = \arccos\rho$$

トセバ　$|\arg F'(\rho)| = 4\arcsin\rho.$

IV.

$$(14)\quad \left|\arg\frac{z^2F'(z)}{\{F(z)\}^2}\right| \leqq \log\frac{1}{1-|z|^2}$$

証明. (7) ヨリ

$$\frac{\partial\frac{1}{f}}{\partial t} = -\frac{1}{f}\,\frac{1+\frac{1}{Kf}}{1-\frac{1}{Kf}}.\quad 即チ\quad \frac{\partial\log\frac{1}{f}}{\partial t} = -\frac{1+\frac{1}{Kf}}{1-\frac{1}{Kf}}$$

デアルカラ

$$\left|d\arg\frac{f'}{f^2}\right| = \frac{2\left|\mathfrak{J}\left\{\left(1-\frac{1}{Kf}\right)^2\right\}\right|}{\left|1-\frac{1}{Kf}\right|^4}dt = \frac{2\mathfrak{J}\left|\left\{\left(1-\frac{1}{Kf}\right)^2\right\}\right|}{\left|1-\frac{1}{Kf}\right|^2}\cdot\frac{-|f|\,d|f|}{1-|f|^2}$$

$$\leqq \frac{2|f|\,d|f|}{1-|f|^2},$$

$$\left|\arg\frac{z^2f'}{f^2}\right| \leqq \int_0^{|z|}\frac{2|f|\,d|f|}{1-|f|^2} = \log\frac{1}{1-|z|^2}.\qquad (証明終)$$

$\Phi(\zeta) = \zeta + c + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots\cdots$ ヲ $|\zeta|>1$ デ正則単葉トスレバ

次ノ $F(z)$ ハ E.K 内デ正則単葉.

$$F(z) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)-c} = z + \cdots\cdots$$

トコロガ $\Phi'(\zeta) = \frac{z^2F'}{F^2}$ デアルカラ

$$(15)\quad |\log\Phi'(\zeta)| \leqq \log\frac{1}{1-|z|^2} = -\log\left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right)$$

[Grunsky ノ定理]